

УДК 512.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ 3D ГРАФИКОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ БИЛИНЕЙНЫХ ОКРЕСТНОСТНЫХ СИСТЕМ

© А.М. Шмырин, С.С. Роечко

Ключевые слова: геометрическое моделирование; график поверхности; билинейная окрестностная система. Рассматривается алгоритм построения графиков поверхностей билинейных окрестностных систем, раскрываются новые возможности в изучении поведения билинейных окрестностных систем с помощью графиков поверхностей, приводится пример построения 3D графика поверхности и анализа поведения системы на основе графика ее поверхности.

Введение. Геометрическое моделирование – это математическое моделирование объектов, заданных в пространстве своими формой, составом и размерами [1].

Построение графиков поверхностей билинейных окрестностных систем и изучение на их основе поведения таких систем является новым направлением в работе с этим видом сложных систем.

Для построения графиков поверхностей билинейных окрестностных систем применяется аналитическое описание модели – аналитические выражения – функции – для каждого из узлов системы.

Построение моделей производится в системе компьютерной алгебры класса систем автоматизированного проектирования Mathcad.

1. Алгоритм построения графиков поверхностей билинейных окрестностных систем. Билинейная окрестностная система:

$$\sum_{\alpha \in O_x[a]} w_x[\alpha, \alpha] x[\alpha] + \sum_{\beta \in O_v[a]} w_v[\alpha, \beta] + \sum_{\alpha \in O_x[a]} \sum_{\beta \in O_v[a]} [w_{1,xv}[\alpha, \alpha, \beta] v[\beta, 1] x[\alpha]] + \dots + w_{m,xv}[\alpha, \alpha, \beta] v[\beta, m] x[\alpha] = 0, \quad (1)$$

где $v[a] \in R^m$ – вход в узле a системы; $x[a] \in R^n$ – состояние в узле a системы; $w_x[\alpha, \alpha]$, $w_v[\alpha, \beta]$, $w_{1,xv}[\alpha, \alpha, \beta]$, $w_{m,xv}[\alpha, \alpha, \beta]$ – некоторые матрицы-параметры; $O_v[a]$, $O_x[a]$ – окрестности по входу и состоянию [2], является поверхностью второго порядка, и для ее описания используются криволинейно-поверхностные аналитические модели в виде уравнений второй степени.

При построении графика поверхности для узла системы необходимо учитывать окрестности узла.

Матрицы инцидентностей, описывающие окрестности, имеют вид:

$$O_x[a] = \begin{bmatrix} s_{x_{11}} & \cdots & s_{x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{x_{n1}} & \cdots & s_{x_{nm}} \end{bmatrix};$$

$$O_v[a] = \begin{bmatrix} s_{v_{11}} & \cdots & s_{v_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{v_{n1}} & \cdots & s_{v_{nm}} \end{bmatrix},$$

все элементы которых в случае четких окрестностей равны единице, в случае нечетких – дробным положительным числом.

Матрицы-параметры w_x , w_v и w_{xv} имеют следующий вид:

$$A_{w_x} = \begin{bmatrix} w_{x_{11}} & \cdots & w_{x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{x_{n1}} & \cdots & w_{x_{nm}} \end{bmatrix};$$

$$A_{w_v} = \begin{bmatrix} w_{v_{11}} & \cdots & w_{v_{1m}} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{v_{n1}} & \cdots & w_{v_{nm}} \end{bmatrix};$$

$$A_{w_{xv}} = \begin{bmatrix} w_{xv_{11}} & \cdots & w_{x_{1(n+m)}} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{xv_{(n+m)1}} & \cdots & w_{xv_{(n+m)(n+m)}} \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы произвести учет окрестностей, необходимо поэлементно умножить соответствующие коэффициенты матриц-параметров w_x , w_v и w_{xv} на коэффициенты из матриц окрестностей $O_v[a]$, $O_x[a]$ и таким образом получить результирующие уравнения для каждого узла. Пример получения результирующего вида по состоянию приведен в (2):

$$Mo_{w_x} = \begin{bmatrix} s_{x_{11}} w_{x_{11}} & \cdots & s_{x_{1n}} w_{x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{x_{n1}} w_{x_{n1}} & \cdots & s_{x_{nm}} w_{x_{nm}} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Используя полученные после учета окрестностей результирующие уравнения для каждого из узлов системы, составляем систему уравнений билинейной окрестностной системы, которая далее будет использоваться для построения графиков поверхностей.

График поверхности системы и исходные данные (состояния и управления) зависят от рассматриваемой точки.

Наборы значений состояний и управлений задаются либо в виде определенных значений, либо с помощью итерационных формул, с конкретным шагом изменения на каждой итерации. Если имеются уже полученные экспериментально наборы таких значений, то целесообразно задавать эти наборы в виде имеющихся значений. Иначе задаются максимальные и минимальные значения состояния и управления и их итерационные формулы.

Итак, алгоритм построения графика поверхности билинейной окрестностной системы имеет следующий вид.

1. Получить билинейную окрестностную систему в виде уравнений для каждого узла – систему уравнений.

2. Произвести учет окрестностей с помощью умножения соответствующих коэффициентов матриц инцидентностей, описывающих окрестности, на соответствующие коэффициенты матриц-параметров.

3. Построение графика поверхности для узла: Составить для узла функцию вида $z = f(x_{1i}, \dots, x_{mi}, v_{1j}, \dots, v_{nj})$ от количества аргументов $n + m$, равного количеству состояний n и управлений m .

Построение графика поверхности для системы в целом: Составить для каждого узла системы функцию вида $z = f(x_{1i}, \dots, x_{mi}, v_{1j}, \dots, v_{nj})$ от количества аргументов $n + m$, равного количеству состояний n и управлений m . (При необходимости произвести свертку функций. Получить функцию для системы).

4. Задать количество наборов данных (итераций) N состояний и управлений.

5. Задать наборы значений состояний и управлений или задать максимальные и минимальные значения состояния и управления и их итерационные формулы.

6. Инициализировать полученные данные в специальном блоке 3D-Plot меню Graph в системе компьютерной алгебры класса систем автоматизированного проектирования Mathcad.

Блок-схема алгоритма построения графиков поверхностей билинейной окрестностной системы представлена на рис. 1.

2. Пример построения графика поверхности билинейной окрестностной системы. Рассмотрим пример создания графика поверхности скалярной билинейной окрестностной системы с четкими окрестностями.

Итак, требуется получить график поверхности билинейной окрестностной системы, состоящей из двух узлов, для первого узла.

Окрестности по состоянию и управлению:

$$O_x[a_1] = \{a_1, a_2\}; O_x[a_2] = \{a_1, a_2\};$$

$$O_v[a_2] = \{a_2\}.$$

Матрицы инцидентностей, описывающие окрестности:

$$O_x[a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$O_v[a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение билинейной окрестностной системы для каждого из узлов имеет следующий вид.

Для узла a1:

$$w_x[1,1]x[1] + w_x[1,2]x[2] + w_v[1,1]v[1] + w_v[1,2]v[2] + w_{xv}[1,1,1]x[1]v[1] + w_{xv}[1,1,2]x[1]v[2] + w_{xv}[1,2,1]x[2]v[1] + w_{xv}[1,2,2]x[2]v[2] = 0.$$

Для узла a2:

$$w_x[2,1]x[1] + w_x[2,2]x[2] + w_v[2,1]v[1] + w_v[2,2]v[2] + w_{xv}[2,1,1]x[1]v[1] + w_{xv}[2,1,2]x[1]v[2] + w_{xv}[2,2,1]x[2]v[1] + w_{xv}[2,2,2]x[2]v[2] = 0.$$

В первом уравнении системы

$$w_x[1,1] = 5; w_x[1,2] = -3; w_v[1,1] = 7,8;$$

$$w_v[1,2] = 0; w_{xv}[1,1,1] = 3,6; w_{xv}[1,1,2] = 0;$$

$$w_{xv}[1,2,1] = 8; w_{xv}[1,2,2] = 0.$$

Во втором уравнении системы

$$w_x[2,1] = -4; w_x[2,2] = 6; w_v[2,1] = 0;$$

$$w_v[2,2] = -2; w_{xv}[2,1,1] = 0; w_{xv}[2,1,2] = 3,4;$$

$$w_{xv}[2,2,1] = 0; w_{xv}[2,2,2] = -5.$$

Теперь произведем учет окрестностей и составим функцию вида $z = f(x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n)$ от количества аргументов $n + m$, равного количеству состояний и управлений.

Получаем для узла a_1 :

$$f_1(x_1, x_2, v_1, v_2) = 1 \cdot 5x_1 - 1 \cdot 3x_2 + 1 \cdot 7,8v_1 + 1 \cdot 1 \cdot 3,6x_1v_1 + 1 \cdot 1 \cdot 8x_2v_1.$$

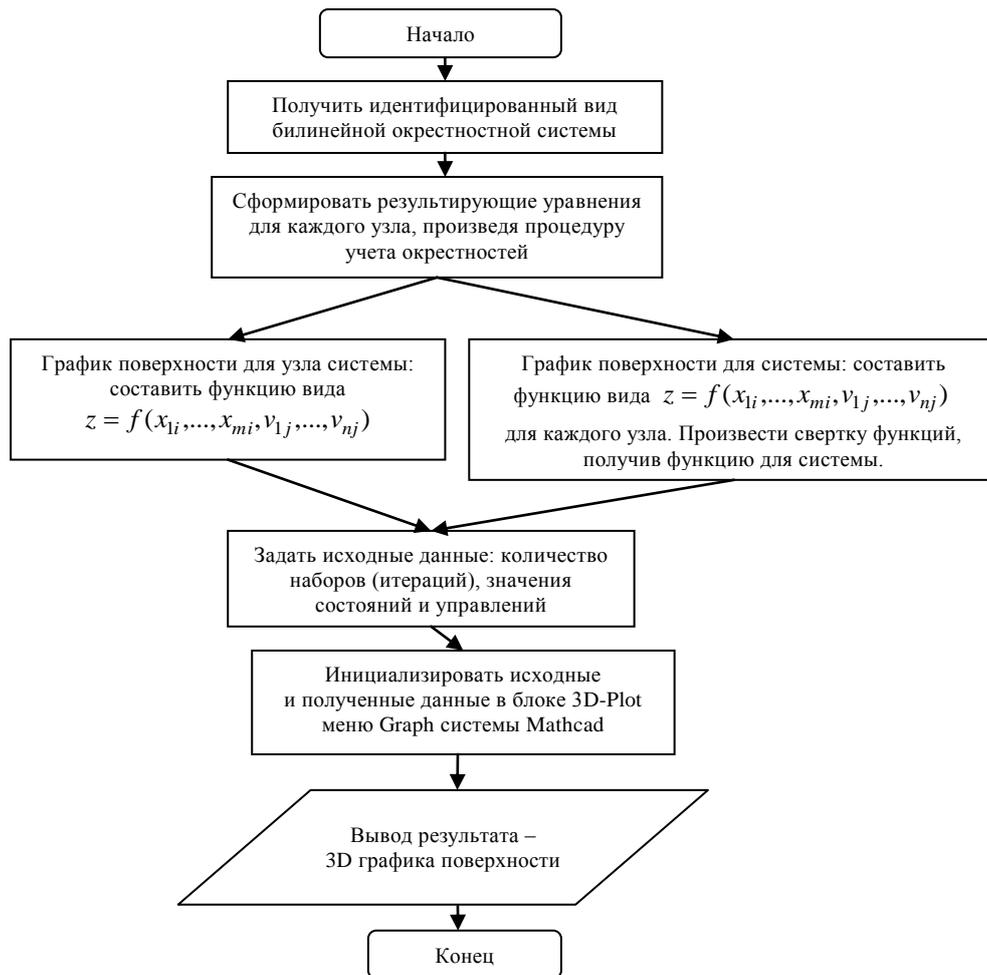


Рис. 1. Алгоритм построения графиков поверхностей билинейных окрестностных систем

Получаем для узла a_2 :

$$f_2(x_1, x_2, v_1, v_2) = 1 \cdot (-4)x_1 - 1 \cdot 6x_2 + 1 \cdot (-2)v_2 + 1 \cdot 1 \cdot 3,4x_1v_2 + 1 \cdot 1 \cdot (-5)x_2v_2.$$

Итак, рассмотрим случай, когда состояния и управления заданы с определенным шагом изменения.

Пусть количество итераций $N = 20$. Зададим набор значений состояний и управлений на каждой итерации для обоих узлов системы. Определим минимальные и максимальные значения состояний и управлений для узлов, а также итерационные формулы определения возможных состояний и управлений в окрестности узлов. Таким образом, задаются узловые точки, в которых будут определены значения функции z :

$$x_{\min} = -5; v_{\min} = -5; x_{\max} = 5; v_{\max} = 5;$$

$$x_{1_i} = x_{\min} + \frac{i}{2}; v_{1_j} = v_{\min} + \frac{i}{2};$$

$$x_{2_i} = 1 + x_{\min} + \frac{i}{2}; v_{2_j} = 1 + v_{\min} + \frac{i}{2}.$$

Наборы значений состояний и управлений на каждой итерации представлены на рис. 2.

Проинициализируем данные в блоке 3D-Plot меню Graph в системе компьютерной алгебры класса систем автоматизированного проектирования Mathcad.

График поверхности для первого узла рассматриваемой системы выглядит следующим образом (рис. 3).

Итак, построен график поверхности системы с точки зрения управления первым узлом системы.

Для построения графика поверхности всей системы в целом в рамках данного подхода необходимо (как возможный вариант) получить отдельную функцию всей системы из функций узлов системы.

3. Возможности в изучении поведения билинейных окрестностных систем на основе графиков их поверхностей. Визуализация билинейных окрестностных систем дает новые возможности анализа и прогнозирования процессов, описываемых с помощью таких систем.

Рассмотрим график поверхности из предыдущего примера более подробно.

Осуществим проецирование на оси i и j . С помощью проекций на оси можно определить, на каких итерациях график поверхности близок к нулю, т. е. значение невязок между левой и правой частями уравнения,

x_1	0
0	-5
1	-4,5
2	-4
3	-3,5
4	-3
5	-2,5
6	-2
7	-1,5
8	-1
9	-0,5
10	0
11	0,5
12	1
13	1,5
14	2
15	2,5
16	3
17	3,5
18	4
19	4,5
20	5

x_2	0
0	-4
1	-3,5
2	-3
3	-2,5
4	-2
5	-1,5
6	-1
7	-0,5
8	0
9	0,5
10	1
11	1,5
12	2
13	2,5
14	3
15	3,5
16	4
17	4,5
18	5
19	5,5
20	6

v_1	0
0	-5
1	-4,5
2	-4
3	-3,5
4	-3
5	-2,5
6	-2
7	-1,5
8	-1
9	-0,5
10	0
11	0,5
12	1
13	1,5
14	2
15	2,5
16	3
17	3,5
18	4
19	4,5
20	5

v_2	0
0	-4
1	-3,5
2	-3
3	-2,5
4	-2
5	-1,5
6	-1
7	-0,5
8	0
9	0,5
10	1
11	1,5
12	2
13	2,5
14	3
15	3,5
16	4
17	4,5
18	5
19	5,5
20	6

Рис. 2. Наборы значений состояний и управлений на каждой итерации

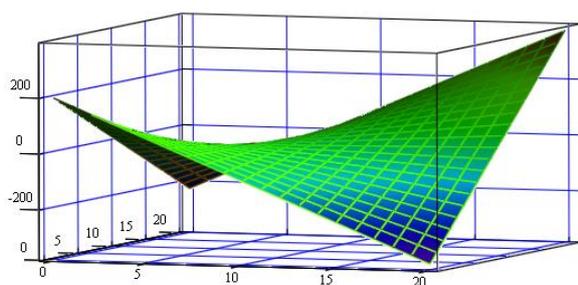


Рис. 3. График поверхности для первого узла системы

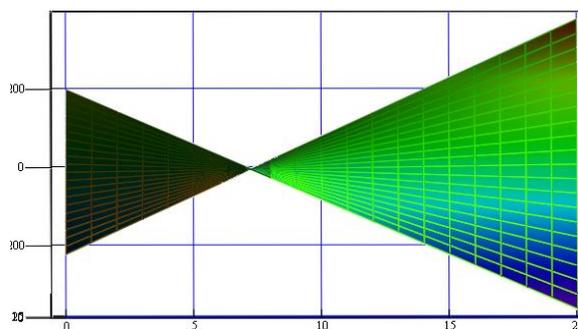


Рис. 4. Проекция графика поверхности на ось i

описывающего функцию f_1 , будут минимальными для заданных состояний и управлений.

Как видно из рис. 4 и 5, график поверхности проходит близко к нулю при наборах значений состояний и управлений с шестого по одиннадцатый.

Это значит, что при подстановке этих наборов значений состояний и управлений в уравнение функции для первого узла значения функции

$$f_1(x_1, x_2, v_1, v_2) = 5x_1 - 3x_2 + 7,8v_1 + 3,6x_1v_1 + 8x_2v_1$$

будут близки к нулю.

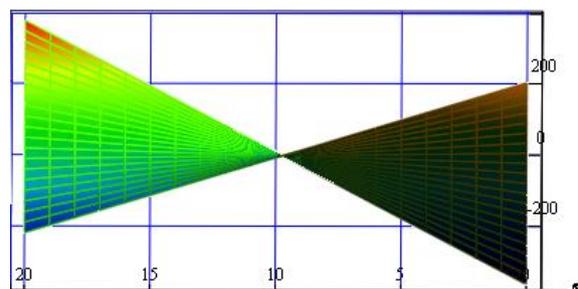


Рис. 5. Проекция графика поверхности на ось j

Действительно, подставив значения состояний и управлений в функцию для данного узла, видим, что при наборах значений с шестого по одиннадцатый значения функции $f_1(x_1, x_2, v_1, v_2)$ близки к нулю, и наиболее близкое к нулю значение достигается на десятом наборе.

Значения функции $f_1(x_1, x_2, v_1, v_2)$ на наборах значений состояний и управлений с шестого по одиннадцатый представлены в табл. 1.

На этих наборах исходных значений состояний и управлений наиболее близкое к нулю значение функции $f_1(x_1, x_2, v_1, v_2)$ составляет -3 при $x_1 = 0, x_2 = 1, v_1 = 0, v_2 = 1$.

Итак, функция f_1 принимает наиболее близкое к нулю значение на десятой итерации. График поверхности можно рассматривать и как изменение процесса при разных наборах исходных данных. При осуществлении смешанного управления стоит задача получить такие состояния и управления, при которых значение невязок между левой и правой частями уравнения, описываю-

щего функцию f_1 , будут минимальными для заданных состояний и управлений. И свое минимальное значение функция f_1 может принять при значениях состояний и управлений из разных наборов возможных состояний и управлений. Функционал геометрического моделирования позволяет скомпилировать значения функции f_1 при разных исходных наборах. Поэтому рассмотрим оси i и j в этом случае как номера наборов исходных состояний и управлений соответственно. Получим значения функции f_1 для комбинаций всех имеющихся наборов. Фрагмент значений функции f_1 представлен на рис. 6.

Как видно на рис. 6, нулевое значение функция f_1 принимает при значениях состояний и управлений при $i = 13$ и $j = 10$, что соответствует 13-му набору состояний и 10-му набору управлений.

Итак, функция $f_1(x_1, x_2, v_1, v_2) = 5x_1 - 3x_2 + 7,8v_1 + 3,6x_1v_1 + 8x_2v_1$ принимает нулевое значение при значениях $x_1 = 1,5, x_2 = 2,5, v_1 = 0, v_2 = 1$.

Таблица 1

Значения функции f_1

Номер набора исходных данных	x_1	x_2	v_1	v_2	$f_1(x_1, x_2, v_1, v_2)$
6	-2	-1	-2	-1	7,8
7	-1,5	-0,5	-1,5	-0,5	-3,6
8	-1	0	-1	0	-9,2
9	-0,5	0,5	-0,5	0,5	-9
10	0	1	0	1	-3
11	0,5	1,5	0,5	1,5	8,8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	198	176.9	155.8	134.7	113.6	92.5	71.4	50.3	29.2	8.1	-13	-34.1
1	170	151.8	133.6	115.4	97.2	79	60.8	42.6	24.4	6.2	-12	-30.2
2	142	126.7	111.4	96.1	80.8	65.5	50.2	34.9	19.6	4.3	-11	-26.3
3	114	101.6	89.2	76.8	64.4	52	39.6	27.2	14.8	2.4	-10	-22.4
4	86	76.5	67	57.5	48	38.5	29	19.5	10	0.5	-9	-18.5
5	58	51.4	44.8	38.2	31.6	25	18.4	11.8	5.2	-1.4	-8	-14.6
6	30	26.3	22.6	18.9	15.2	11.5	7.8	4.1	0.4	-3.3	-7	-10.7
7	2	1.2	0.4	-0.4	-1.2	-2	-2.8	-3.6	-4.4	-5.2	-6	-6.8
8	-26	-23.9	-21.8	-19.7	-17.6	-15.5	-13.4	-11.3	-9.2	-7.1	-5	-2.9
9	-54	-49	-44	-39	-34	-29	-24	-19	-14	-9	-4	1
10	-82	-74.1	-66.2	-58.3	-50.4	-42.5	-34.6	-26.7	-18.8	-10.9	-3	4.9
11	-110	-99.2	-88.4	-77.6	-66.8	-56	-45.2	-34.4	-23.6	-12.8	-2	8.8
12	-138	-124.3	-110.6	-96.9	-83.2	-69.5	-55.8	-42.1	-28.4	-14.7	-1	12.7
13	-166	-149.4	-132.8	-116.2	-99.6	-83	-66.4	-49.8	-33.2	-16.6	0	16.6
14	-194	-174.5	-155	-135.5	-116	-96.5	-77	-57.5	-38	-18.5	1	20.5
15	-222	-199.6	-177.2	-154.8	-132.4	-110	-87.6	-65.2	-42.8	-20.4	2	24.4
16	-250	-224.7	-199.4	-174.1	-148.8	-123.5	-98.2	-72.9	-47.6	-22.3	3	28.3
17	-278	-249.8	-221.6	-193.4	-165.2	-137	-108.8	-80.6	-52.4	-24.2	4	32.2
18	-306	-274.9	-243.8	-212.7	-181.6	-150.5	-119.4	-88.3	-57.2	-26.1	5	36.1
19	-334	-300	-266	-232	-198	-164	-130	-96	-62	-28	6	40
20	-362	-325.1	-288.2	-251.3	-214.4	-177.5	-140.6	-103.7	-66.8	-29.9	7	43.9

Рис. 6. Фрагмент значений функции f_1

Таким образом, исходя из полученной информации, можно делать выводы о дальнейшем управлении системой, т. е. какие входные воздействия из возможных следует задавать для достижения определенной цели.

Геометрическое моделирование билинейных окрестностных систем позволяет решать несколько задач, а именно, осуществлять визуальный анализ процесса, описываемый с помощью билинейной окрестностной системы, осуществлять управление системой, используя наиболее подходящие значения состояний и управлений, которые могут быть установлены или поданы на вход системы.

Заключение. Рассмотрен алгоритм построения графиков поверхностей билинейных окрестностных систем. Использование 3D моделирования графиков поверхностей билинейных окрестностных систем показывает хорошие результаты в прогнозировании процессов, описываемых с помощью окрестностных систем, и открывает дополнительные возможности в управлении такими системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Косников Ю.Н.* Поверхностные модели в системах трехмерной компьютерной графики. Пенза, 2007. С. 4.
2. *Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырина О.А.* Билинейные окрестностные системы. Липецк, 2006. С. 64.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-08-97525 р-центр_а).

Поступила в редакцию 19 апреля 2013 г.

Shmyrin A.M., Roenko S.S. MODELING OF 3D GRAPHICS OF SURFACES OF BILINEAR BORDER SYSTEMS

An algorithm for construction of surfaces bilinear border systems is considered; new possibilities for studying the behavior of bilinear neighborhood systems with plots of surfaces is opened; an example of building 3D graphics surface, and behavior analysis system based on the schedule of its surface is given.

Key words: geometric modeling; surface plot; bilinear border systems.